ÚLOHY NA VĚTU O LAGRANGEOVÝCH MULTIPLIKÁTORECH

Nalezněte maxima a minima funkce f na množině M.

1. $f(x,y,z) = xyz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$

2. $f(x,y,z) = \sin x \sin y \sin z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3; x+y+z = \frac{\pi}{2}, x>0, y>0, z>0\}$

3. $f(x,y,z) = xy^2z^3;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x+2y+3z = a, x>0,\ y>0,\ z>0\}$; kde $a > 0$

4. $f(x,y) = y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ (x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2) = 0\}$

5. $f(x,y) = x^2+y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ 4y^3-4y+x^2 = 0,\ y \geq 0\}$

6. $f(x,y) = x^4y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^4+y^4 \leq 16, x \geq -1\}$

7. $f(x,y) = 2x+4y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y} \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0\}$

8. $f(x,y,z) = e^{-z^2}(x^2+xy+y^2);\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2 = 1, |z| \leq 1\}$

9. $f(x,y) = -y^2+x^2+\frac{4}{3}x^3;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 4, x \leq 0\}$

10. $f(x,y,z) = xy+yz;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x+y+z = 1\}$

11. $f(x,y) = (x^2+7y^2)e^{-(2x^2+y^2)};\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+4y^2 \leq 1\}$

12. $f(x,y,z) = z+e^{xy};\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x^2+y^2 = z^2\}$

13. $f(x,y,z) = x^2+2xz+y^2+z;\ M = \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = 1,\ x = y^2+z^2\}$

14. $f(x,y) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y;\ M = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0, y \geq 0\}$

VÝSLEDKY

1. Maximum: $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$; minimum: $[-1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}]$, $[1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$, $[-1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}]$.
2. Maximum: $[\pi/6, \pi/6, \pi/6]$; minima se nenabývá. **3.** Maximum: $[a/6, a/6, a/6]$; minima se nenabývá.
4. Maximum: $[\sqrt{3}/2, 1/2]$, $[-\sqrt{3}/2, 1/2]$; minimum: $[\sqrt{3}/2, -1/2]$, $[-\sqrt{3}/2, -1/2]$.

5. Maximum: $\left[\sqrt{7\sqrt{5/12}/3}, \sqrt{5/12}\right]$, $\left[-\sqrt{7\sqrt{5/12}/3}, \sqrt{5/12}\right]$; minimum: $[0,0]$.

6. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množin M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^4, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou nulové pro $[0,y];\ y \in (-2,2)$. Hranici množiny M si rozdělme na dvě části:

$$H_1 = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^4+y^4 = 16, x > -1\},$$
$$H_2 = \{[-1,y] \in \mathbf{R}^2;\ y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle\}.$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^4+y^4-16$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 4x^3, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 4y^3, \qquad [x,y] \in \mathbf{R}^2.$$

Pro každé $[x,y] \in H_1$ platí $(\frac{\partial g}{\partial x}(x,y), \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$x^4+y^4 = 16, \tag{1}$$
$$4x^3y = \lambda 4x^3, \tag{2}$$
$$x^4 = \lambda 4y^3. \tag{3}$$

Z (2) vyplývá, že $x = 0$ nebo $y = \lambda$. V prvním případě dostaneme z (1), že $y = \pm 2$. V druhém případě dostaneme z (3), že $x = \sqrt{2}y$ nebo $x = -\sqrt{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme body

$$\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right], \left[-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right],$$

Poslední dva body ovšem nesplňují podmínku $x > -1$. Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(-1, y) = y, \qquad y \in \langle -\sqrt[4]{15}, \sqrt[4]{15} \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou

$$[-1, \sqrt[4]{15}], \qquad [-1, -\sqrt[4]{15}]$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, \frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$ a minima v $\left[\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt[4]{5}}, -\frac{2}{\sqrt[4]{5}}\right]$.

7. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Spočtěme parciální derivace funkce f a zkoumejme, zda uvnitř množiny M existuje bod, kde jsou obě parciální derivace funkce f nulové.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 4, \qquad [x, y] \in \mathbf{R}^2.$$

Obě parciální derivace jsou vždy nenulové a proto f nabývá extrémů na hranici M. Hranici množiny M si rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x, y] \in \mathbf{R}^2;\ \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, x > 0,\ y > 0\}, \\ H_2 &= \{[0, y] \in \mathbf{R}^2;\ y \in \langle 0, 1 \rangle\}, \\ H_3 &= \{[x, 0] \in \mathbf{R}^2;\ x \in \langle 0, 1 \rangle\}. \end{aligned}$$

Pro nalezení podezřelých bodů na množině H_1 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x, y) = \sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} - 1$, která je (stejně jako f) třídy $\mathcal{C}^1$ na prvním otevřeném kvadrantu. Pro parciální derivace funkce g platí

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{4}x^{-3/4}, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{4}y^{-3/4}, \qquad x > 0,\ y > 0.$$

Pro každé $[x, y] \in H_1$ platí $\left(\frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)\right) \neq (0, 0)$. Řešme následující soustavu

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y} = 1, \tag{1}$$

$$2 = \lambda \frac{1}{4} x^{-3/4}, \tag{2}$$

$$4 = \lambda \frac{1}{4} y^{-3/4}. \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá, že $x = 2\sqrt[3]{2}y$. Dosazením do (1) obdržíme podezřelý bod

$$\left[\frac{2^{4/3}}{(2^{1/3} + 1)^4}, \frac{1}{(2^{1/3} + 1)^4}\right].$$

Zkoumejme chování na množině H_2. Funkce f má na H_2 tvar:

$$f(0, y) = 4y, \qquad y \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Dalšími podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[0, 1]$.

Podobně zkoumejme chování na množině H_3. Funkce f má na H_3 tvar:

$$f(x, 0) = 2x, \qquad x \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Podezřelými body tedy jsou $[0, 0]$, $[1, 0]$.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima na množině M v bodě $[0, 1]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

8. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní (jedná se o plášť válce bez podstav). Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Vnitřek množiny M je prázdný. Z tvaru funkce f vyplývá, že

$$f(x,y,1) = f(x,y,-1) < f(x,y,z) < f(x,y,0), \qquad [x,y,z] \in \mathbf{R}^3,\ z \in (-1,1) \setminus \{0\}.$$

Maxima se musí tedy nabývat na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3;\ z = 0\}$ a minima na množině $M \cap \{[x,y,z] \in \mathbf{R}^3;\ z = -1 \text{ nebo } z = 1\}$. Položme $g(x,y) = x^2 + xy + y^2$ a vyšetřujme extrémy g na množině $H = \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $h(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Platí $g, h \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace funkce h platí

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Pro každé $[x,y] \in H$ máme $(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y), \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 1, & (1)\\ 2x + y &= \lambda 2x, & (2)\\ x + 2y &= \lambda 2y. & (3) \end{aligned}$$

Sečtením (2) a (3) dostaneme $(3 - 2\lambda)(x + y) = 0$. To znamená, že buď $x = -y$ nebo $\lambda = 3/2$. V prvním případě dostaneme z (1) podezřelé body $[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Ve druhém případě s pomocí (2) odvodíme $x = y$ a (1) dává podezřelé body $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$, $[-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}]$. Funkce g nabývá minima na množině H v bodech

$$[1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}].$$

Z výše uvedeného výpočtu vyplývá, že funkce f nabývá minima v bodech

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, -1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, -1],$$

$$[-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 1],\ [1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 1]$$

a maxima v bodech

$$[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0].$$

9. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu s uzavřenou polorovinou), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body nejprve uvnitř množiny M. Spočteme parciální derivace f:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4x^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y.$$

Obě parciální derivace jsou nulové v bodech $[-1/2, 0],\ [0,0]$. Pouze první bod však patří do vnitřku množiny M.

Hranici množiny M si rozdělíme na dvě části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x = 0,\ y \in [-2,2]\},\\ H_2 &= \{[x,y] \in \mathbf{R}^2;\ x^2 + y^2 = 4,\ x < 0\}. \end{aligned}$$

Na množině H_1 má funkce f podezřelé body: $[0,2],\ [0,-2],\ [0,0]$, protože $f(0,y) = -y^2$. Podezřelé body na H_2 budeme hledat metodou Lagrangeových multiplikátorů. Vazebná podmínka je určena funkcí $g(x,y) = x^2 + y^2 - 4$. Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Na množině H_2 je vždy $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}) \neq (0,0)$. Řešme následující soustavu

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4, & (1)\\ 2x + 4x^2 &= \lambda 2x, & (2)\\ -2y &= \lambda 2y. & (3) \end{aligned}$$

Z (3) dostaneme, že $\lambda = -1$ nebo $y = 0$. První možnost spolu s (2) dává, že $x = 0$ nebo $x = -1$. Pomocí (1) dopočteme pro tato x příslušná y a dostaneme body $[0, 2],\ [0, -2],\ [-1, \sqrt{3}],\ [-1, -\sqrt{3}]$. První dva ovšem neleží v H_2. Pokud $y = 0$, pak z (1) dostáváme bod $[-2, 0]$ a bod $[2, 0]$, který ovšem neleží v H_2.

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že f nabývá maxima v bodě $[-1/2, 0]$ a minima v bodě $[-2, 0]$.

10. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o průnik sféry a roviny), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x, y, z) = x + y + z - 1.$$

Obě funkce $g_1,\ g_2$ jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$ stejně jako funkce f. Pro parciální derivace těchto funkcí platí

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x + z, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 1,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = 1.
\end{aligned}$$

Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (1, 1, 1)$ jsou lineárně závislé, právě když $x = y = z$. Žádný takový bod ovšem neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu

$$\begin{aligned}
y &= \lambda_1 2x + \lambda_2, && (1)\\
x + z &= \lambda_1 2y + \lambda_2, && (2)\\
y &= \lambda_1 2z + \lambda_2, && (3)\\
x^2 + y^2 + z^2 &= 1, && (4)\\
x + y + z &= 1. && (5)
\end{aligned}$$

Z (1) a (3) vyplývá $\lambda_1 x = \lambda_1 z$. To znamená, že máme dvě možnosti: buď $\lambda_1 = 0$ nebo $x = z$. V prvním případě dostaneme nejprve z (1) $y = \lambda_2$. Odtud a z (2) obdržíme $x + z = y$. Tento vztah spolu s (4) a (5) dává podezřelé body

$$\left[(1 - \sqrt{5})/4, 1/2, (1 + \sqrt{5})/4\right], \qquad \left[(1 + \sqrt{5})/4, 1/2, (1 - \sqrt{5})/4\right].$$

Ve druhém případě dostaneme pomocí vztahů (4) a (5) podezřelé body

$$[0, 1, 0], \qquad [2/3, -1/3, 2/3].$$

Porovnáním funkčních hodnot v podezřelých bodech zjistíme, že funkce f nabývá na množině M minima v bodě $[2/3, -1/3, 2/3]$ a maxima nabývá v prvních dvou podezřelých bodech.

11. Množina M je omezená a uzavřená (jedná se o elipsu), a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Hledejme nejprve podezřelé body uvnitř množiny M. Pro parciální derivace funkce f platí:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= 2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x),\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= 14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y).
\end{aligned}$$

Uvnitř množiny M hledáme ty body, kde jsou obě parciální derivace nulové. To jsou právě ty body z M, které splňují

$$\begin{aligned}
2x(1 - 2(x^2 + 7y^2)) &= 0, && (1)\\
2y(7 - (x^2 + 7y^2)) &= 0. && (2)
\end{aligned}$$

Řešením této soustavy jsou body $[0, 0],\ [1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, 0],\ [0, 1],\ [0, -1]$, pouze první tři však leží uvnitř množiny M.

Podezřelé body na hranici M hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina $H(M)$ je určena pomocí vazebné funkce
$$g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 1.$$
Funkce f i g jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí
$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 8y.$$
Vektor $(2x, 8y)$ je nulový, právě když $[x, y] = [0, 0]$. Tento bod ovšem neleží na hranici množiny M. Nyní budeme řešit následující soustavu
$$2x \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-4x) = 2\lambda x, \tag{1}$$
$$14y \cdot e^{-(2x^2+y^2)} + (x^2 + 7y^2)e^{-(2x^2+y^2)} \cdot (-2y) = 8\lambda y, \tag{2}$$
$$x^2 + 4y^2 = 1. \tag{3}$$
Z (1) vyplývá, že $x = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = \lambda$ a z (2) vyplývá, že $y = 0$ nebo $e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)) = 4\lambda$. Pokud $x = 0$, pak podle (3) je $y = \pm 1/2$. Pokud $y = 0$, pak podle (3) je $x = \pm 1$. V případě, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$, musí být
$$4e^{-(2x^2+y^2)}(1 - 2(x^2 + 7y^2)) = e^{-(2x^2+y^2)}(7 - (x^2 + 7y^2)).$$
Odtud plyne $7(x^2 + 7y^2) = -3$, což je spor. Nalezli jsme tyto podezřelé body
$$[0, 0],\ [1/\sqrt{2}, 0],\ [-1/\sqrt{2}, 0],\ [0, 1/2],\ [0, -1/2],\ [1, 0],\ [-1, 0].$$
Funkce f nabývá maxima v bodech $[0, 1/2],\ [0, -1/2]$ a minima v bodě $[0, 0]$.

12. Množina M je omezená a uzavřená, a proto je kompaktní. Funkce f je spojitá na M, takže na M nabývá svého maxima i minima. Množina M má prázdný vnitřek.

Podezřelé body hledejme metodou Lagrangeových multiplikátorů. Množina M je určena pomocí vazebných funkcí
$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1, \qquad g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2.$$
Funkce $f,\ g_1$ i g_2 jsou třídy $\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$. Pro parciální derivace těchto funkcí platí
$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{xy}y, && \frac{\partial g_1}{\partial x}(x, y, z) = 2x, && \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y, z) = 2x,\\
&\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^{xy}x, && \frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y, z) = 2y, && \frac{\partial g_2}{\partial y}(x, y, z) = 2y,\\
&\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1, && \frac{\partial g_1}{\partial z}(x, y, z) = 2z, && \frac{\partial g_2}{\partial z}(x, y, z) = -2z.
\end{aligned}$$
Vektory $(2x, 2y, 2z),\ (2x, 2y, -2z)$ jsou lineárně závislé, právě když $z = 0$ nebo $x = y = 0$. Žádný takový bod neleží v množině M. Nyní budeme řešit následující soustavu
$$e^{xy}y = \lambda_1 2x + \lambda_2 2x, \tag{1}$$
$$e^{xy}x = \lambda_1 2y + \lambda_2 2y, \tag{2}$$
$$1 = \lambda_1 2z - \lambda_2 2z, \tag{3}$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \tag{4}$$
$$x^2 + y^2 - z^2 = 0. \tag{5}$$
Z (4) a (5) vyplývá, že $z = \pm 1/\sqrt{2}$. Odečteme-li (1) od (2) dostaneme
$$e^{xy}(x - y) = -2(\lambda_1 + \lambda_2)(x - y).$$
Z poslední rovnice plyne, že buď $x = y$ nebo $e^{xy} = -2(\lambda_1 + \lambda_2)$. V prvním případě dopočítáme ze (4) tyto podezřelé body
$$[1/2, 1/2, 1/\sqrt{2}],\ [1/2, 1/2, -1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2, -1/2, 1/\sqrt{2}],\ [-1/2, -1/2, -1/\sqrt{2}].$$

Ve druhém případě dosadíme za e^{xy} do (1) a dostaneme
$$-2y(\lambda_1+\lambda_2)=2x(\lambda_1+\lambda_2).$$
Nyní máme opět dvě možnosti: buď $x=-y$ nebo $\lambda_1+\lambda_2=0$. První možnost dává podezřelé body
$$[1/2,-1/2,1/\sqrt{2}],\ [1/2,-1/2,-1/\sqrt{2}],$$
$$[-1/2,1/2,1/\sqrt{2}],\ [-1/2,1/2,-1/\sqrt{2}].$$
Druhá možnost spolu s (1) a (2) dává $x=y=0$. Toto však nemůže nastat vzhledem ke (4) a (5).

Funkce f nabývá maxima v bodech
$$[1/2,1/2,1/\sqrt{2}],\qquad [-1/2,-1/2,1/\sqrt{2}]$$
a minima
$$[-1/2,1/2,-1/\sqrt{2}],\qquad [1/2,-1/2,-1/\sqrt{2}].$$

13. Položme
$$g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1,\qquad g_2(x,y,z)=x-y^2-z^2.$$
Obě funkce jsou spojité a proto je množina M uzavřená. Množina M je obsažena v jednotkové kouli o středu v počátku - je tedy omezená. Z charakterizace kompaktních podmnožin $\mathbf{R}^n$ vyplývá, že M je kompaktní. Funkce f je spojitá a proto nabývá na M svého maxima i minima. Hledejme podezřelé body pomocí Lagrangeových multiplikátorů. Vidíme, že $f,\ g_1,\ g_2\in\mathcal{C}^1(\mathbf{R}^3)$.
$$\begin{array}{lll}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+2z & \frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)=2x & \frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)=1\\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)=2y & \frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)=-2y\\
\frac{\partial f}{\partial z}(x,y)=2x+1 & \frac{\partial g_1}{\partial z}(x,y)=2z & \frac{\partial g_2}{\partial z}(x,y)=-2z
\end{array}$$
Zkoumejme pro která $[x,y,z]\in M$ jsou vektory $(2x,2y,2z),\ (1,-2y,-2z)$ lineárně závislé. Jde tedy o to zjistit, kdy je hodnost následující matice menší než 2.
$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x & 2y & 2z\end{pmatrix}$$
Třetí řádkovou elementární úpravou dostaneme
$$\begin{pmatrix}1 & -2y & -2z\\ 2x+1 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$
Hodnost této matice je menší než 2, právě když $x=-\frac{1}{2}$ nebo $y=z=0$. Není obtížné dosazením zjistit, že body splňující některou z těchto podmínek nemohou ležet v M. Nyní řešme soustavu:
$$x^2+y^2+z^2=1 \tag{1}$$
$$x=y^2+z^2 \tag{2}$$
$$2x+2z=2\lambda_1x+\lambda_2 \tag{3}$$
$$2y=2\lambda_1y-2\lambda_2y \tag{4}$$
$$2x+1=2\lambda_1z-2\lambda_2z \tag{5}$$

Z (1) a (2) vyplývá $x^2+x-1=0$, tj. $x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{5})$. Vzhledem k (2) musí být x nezáporné a proto nás zajímá pouze kladný kořen kvadratické rovnice, tj.
$$x=(\sqrt{5}-1)/2. \tag{6}$$
Z (4) vyplývá, že buď $y=0$ nebo $\lambda_1-\lambda_2=1$. V prvním případě vypočteme z (2) a (6), že $z=\pm\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}$. Odtud dostáváme podezřelé body
$$\left[(\sqrt{5}-1)/2,0,\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right],\qquad \left[(\sqrt{5}-1)/2,0,-\sqrt{(\sqrt{5}-1)/2}\right].$$

Ve druhém případě plyne z (5) $x + \frac{1}{2} = z$. Takže $z = \sqrt{5}/2$. Z (2) plyne $y^2 = x - z^2$. Po dosazení máme $y^2 = (2\sqrt{5} - 7)/4 < 0$ – což není možné.

Dosazením zjistíme, že funkce f nabývá na M svého maxima v prvním podezřelém bodě a minima ve druhém.

14. Množina M je uzavřená a omezená (jedná se o průnik uzavřeného kruhu a uzavřeného prvního kvadrantu) – je tedy kompaktní. Funkce f je spojitá na celém $\mathbf{R}^2$ a proto musí nabývat maxima i minima na množině M. Zkoumejme chování funkce f nejprve na vnitřku množiny M.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{1+x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Uvnitř množiny M jsou obě parciální derivace funkce f nenulové, proto uvnitř M není žádný podezřelý bod. Hranici množiny M rozdělme na tři části:

$$\begin{aligned} H_1 &= \{[x,0];\ x \in \langle 0,1\rangle\},\\ H_2 &= \{[0,y];\ y \in \langle 0,1\rangle\},\\ H_3 &= \{[x,y];\ x>0,\ y>0,\ x^2+y^2=1\}. \end{aligned}$$

Je-li $[x,y] \in H_1$, platí $f(x,y) = \operatorname{arctg} x$. Funkce arctg je rostoucí a proto podezřelými body jsou $[0,0]$ a $[1,0]$. Podobně je tomu na množině H_2. Tam dostáváme podezřelé body $[0,0]$ a $[0,1]$. Na H_3 použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů. Nechť $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Vidíme, že $f,\ g \in \mathcal{C}^1(\mathbf{R}^2)$. Pro parciální derivace g platí:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 2x, \qquad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 2y.$$

Vektor $(2x, 2y)$ je nulový, právě když $[x,y] = [0,0]$ – tento bod ovšem neleží v H_3. Nyní je třeba vyřešit následující soustavu

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{1}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = \lambda 2x \tag{2}$$

$$\frac{1}{1+y^2} = \lambda 2y \tag{3}$$

Z (2) a (3) vyplývá

$$\lambda 2x(1+x^2) = \lambda 2y(1+y^2). \tag{4}$$

Z (2) vyplývá, že $\lambda \neq 0$. Proto můžeme (4) upravit na tvar

$$x - y = -(x-y)(x^2 + xy + y^2).$$

Platí tedy buď $x = y$ nebo $-1 = x^2 + xy + y^2$. Druhá možnost však nastat nemůže, neboť prvky z H_3 mají obě souřadnice kladné. První možnost spolu s (1) dává další podezřelý bod $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.

Nalezli jsme tyto podezřelé body: $[0,0]$, $[0,1]$, $[1,0]$, $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$. Porovnáním funkčních hodnot funkce f v uvedených bodech (proveďte podrobně) zjistíme, že f nabývá svého minima v bodě $[0,0]$ a maxima v bodě $[1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}]$.